Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1111 PRIMER EXAMEN PARCIAL (30%)
ENERO-MARZO DE 2005
RECUPERACION
25 de febrero de 2005 AUL214 12:30

soluciones

1.- (6 ptos.) Resuelva la inecuación : $\dfrac{x+1}{|x-3|+2x} \le 3$.

El conjunto, S, de todas las soluciones de esta inecuación es la unión, $S_1 \cup S_2$, de los dos conjuntos : S_1= conjunto de la soluciones menores que 3 , S_2= conjunto de las soluciones mayores o iguales que 3 .

El conjunto S_1 está definido por : $\begin{cases} x < 3 \\ \dfrac{x+1}{(3-x)+2x} \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ \dfrac{x+1}{(3+x)} -3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ \dfrac{-2x-8}{x+3} \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ \dfrac{x+4}{x+3} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow S_1=(-\infty, 3) \cap \big((-\infty, -4] \cup (-3, +\infty) \big) = (-\infty, -4] \cup (-3, 3)$;

El conjunto S_2 está definido por : $\begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{x+1}{(x-3)+2x} \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{x+1}{3x-3} \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{x+1}{x-1} \le 9 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{x+1}{x-1} - 9 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{-8x+10}{x-1} \le 0 \end{cases} \Rightarrow S_2=[3,+\infty) \cap \big((-\infty,1] \cup [\tfrac{5}{4} ,+\infty) \big) = [3,+\infty)$;

en conclusión : $S= S_1 \cup S_2 = (-\infty, -4] \cup (-3, 3) \cup [3,+\infty) = (-\infty, -4] \cup (-3 ,+\infty)$.

2.- (8 ptos.) Sean r la recta de ecuación y=x, s la recta que pasa por los dos puntos A(3, 2), B(5,-2) y C la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-10x-8y = 0$.
Halle la longitud del segmento PQ, siendo P el centro de la circunferencia C y siendo Q el punto de intersección de las dos rectas r, s.

m_{AB}= -2, ecuación de la recta s (por A, B) : 2x+y-8 = 0 ; el punto de intersección de las dos rectas se obtiene resolviendo el sistema : $\begin{cases} y=x \\ 2x+y-8=0 \end{cases} \Rightarrow Q(\tfrac{8}{3}, \tfrac{8}{3})$;

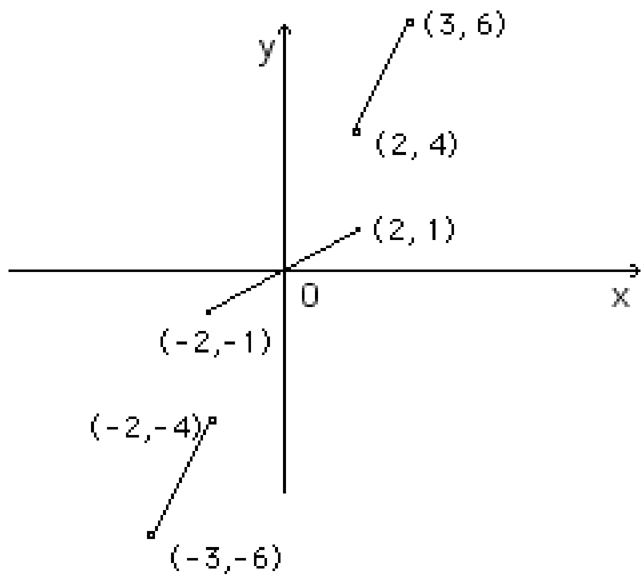
el centro de la circunferencia es P(5, 4) ;

$$PQ=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2} = \sqrt{(5-\tfrac{8}{3})^2+(4-\tfrac{8}{3})^2} = \frac{\sqrt{65}}{3}$$

3.- (9 ptos.) Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{si } |x| \le 2 \\ 2x, & \text{si } 2 < |x| < 3 \end{cases}$;

3a) Bosqueje la gráfica de f ;
3b) Halle el dominio de f;
3c) Halle la imagen (=rango) de f ;
3d) Diga, justificando, si f es inyectiva o no ;
3e) En el caso que exista, halle la función inversa de f.(En caso de que no exista, explique por qué);
3f) Defina con fórmulas la función compuesta $f \circ h$,
si h se define con $h(x) = \sqrt{1-|x|}$.

3a**)**



3b) $D_f = (-3, 3)$; **3c**) $Im(f) = (-6, -4) \cup [-1, 1] \cup (4, 6)$;

3d) f es inyectiva, ya que toda recta paralela al eje x interseca su gráfica a lo máximo en un solo punto.

3e) $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } |x| \le 1 \\ \dfrac{x}{2}, & \text{si } 4 < |x| < 6 \end{cases}$;

3f) Como para todo número x del dominio natural de h resulta $|h(x)| \le 1 < 2$, se tiene:

$(f \circ h)(x) = \dfrac{h(x)}{2} = \dfrac{\sqrt{1-|x|}}{2}$.

4.- (7 ptos.) Sean f , g , h las funciones definidas por :

$f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x-\pi$, $h(x) = x+1$.

4a) Halle la fórmula que define la función compuesta $H(x)=(h \circ f \circ g)(x)$;

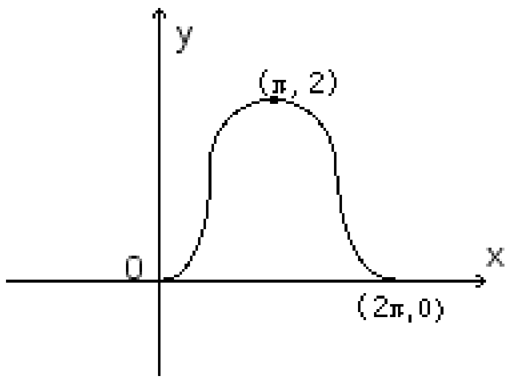
4b) Bosqueje la gráfica de H en $[0, 2\pi]$;

4c) Halle la imagen de H ;

4d) Halle la función inversa de la función g/h .

4a) $H(x)= \cos(x-\pi) + 1$;

4b)



4c) $Im(H)= [0, 2]$;

4d) $x = \dfrac{y-\pi}{y+1} \Rightarrow xy+x = y-\pi \Rightarrow y = \dfrac{x+\pi}{1-x} \Rightarrow (g/h)^{-1}(x) = \dfrac{x+\pi}{1-x}$.